Série 2 : Continuité-Dérivabilité

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes :

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3\cos(x)} \quad 2.\ \lim_{x\to 0}\frac{2\tan(x)-\sin(2x)}{x^3\sin(x)} \quad 3.\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\ln(x))}{\sqrt{x}}$$

$$4.\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x-1}-x \quad 5.\ \lim_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x} \quad 6.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\pi)}{x}$$

$$7.\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin(2\pi x)}{\sin(7\pi x)} \quad 8.\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{1-\cos(2x)} \quad 9.\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$$

Exercice 2. Prolonger les fonctions suivantes par continuité quand c'est possible :

$$1.\ f_1(x)=\begin{cases}-2x-1 & \text{si}\quad x<0,\\ x & \text{si}\quad x>0.\end{cases} \quad 2.\ f_2(x)=\frac{1+x}{1+x^3} \quad 3.\ f_3(x)=\frac{\sin x}{x} \quad 4.\ f_4(x)=(1+x)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$5.\ f_5(x)=\frac{x^2}{\cos x-e^{x^2}} \quad 6.\ f_6(x)=\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad 7.\ f_7(x)=\cos(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad 8.\ f_8(x)=\frac{1+x}{1+x^{2n+1}}\ n\in\mathbb{N}.$$

Exercice 3. Calculer $f'(x_0)$ pour les fonctions suivantes :

$$1.\ f(x)=e^x \quad x_0=\pi, \qquad 2.\ f(x)=\frac{3x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} \quad x_0=3, \qquad 3.\ f(x)=\frac{\sin x}{x} \quad x_0=0,$$

$$4.\ f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x-1}{x} & \text{si}\quad x\neq 0,\\ 0 & \text{en}\quad x_0=0.\end{cases} \qquad 5.\ f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(2x)}{\sin x} & \text{si}\quad x\neq\pi,\\ -2 & \text{en}\quad x_0=\pi.\end{cases}$$

Exercice 4. Montrer les relations suivantes :

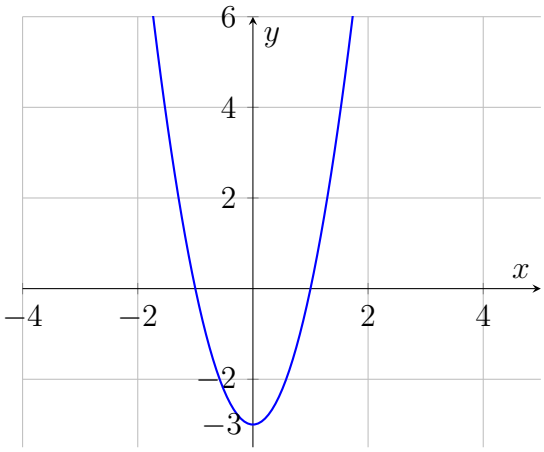
1. pour tout $x>0$:
$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$$
2. pour tout $x\in]-1,1[$:
$$\arccos x+\arcsin x=\frac{\pi}{2}.$$
3. pour tout $x\in]-1,1[$:
$$\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}.$$
4. pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$\operatorname{argsh}(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

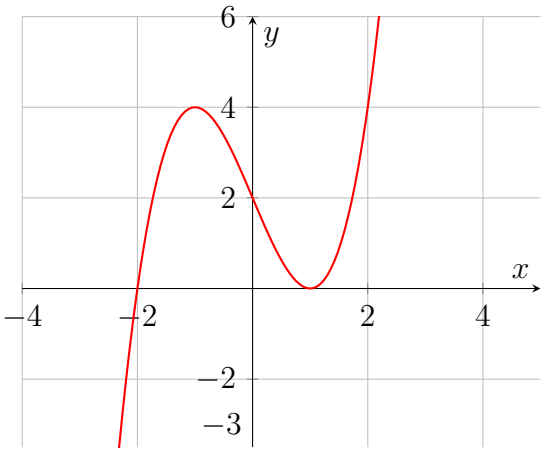
Exercice 5. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[,\ \tan x\geqslant x.$
2. $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}],\ \frac{\sin x}{x}\leqslant 1.$
3. $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \frac{x}{1+x}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x.$

4. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 6. Les deux courbes suivantes représentent une fonction g et sa dérivé g' noté $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_{g'}$ respectivement.





1. Déterminer la courbe qui représente g et celle qui represente g'.
2. Donner le signe de g et de g'.
3. Déterminer graphiquement $\lim\limits_{+\infty} g$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g'(x)}{x}$.
4. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{C}_g$ en $x_0 = 0$.
5. Sachant que $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.
   i) En utilisant le graphe déterminer a, b et c.
   ii) En déduire que $g'(x) = 3x^2 - 3$.

Exercice 7. Pour tout entier $n > 0$ on considère la fonction $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n - (1-x)^2.$$

1. Dans cette question, l'entier n est fixé.
   (a) Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $[0,1]$.
   (b) Déduire que f_n réalise une bijection de $[0,1]$ sur son image $f_n([0,1])$ (que l'on précisera).
   (c) Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
   (d) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.
2. On considère la suite de terme général $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$.
   (a) Montrer que $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, on notera α sa limite.
   (c) Montrer que $\alpha = 1$.

Exercice 8. Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par :

$$g(x) = (x-2)e^x + (x+2) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $g \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Vérifier que $f''(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$ pour tout $x > 0$. En déduire que $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

4. On définit une suite $(u_n)_n$ par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 0 \end{cases}$$
Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_n - \ln 2| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2.$$

5. En déduire que $(u_n)_n$ converge vers $\ln 2$.

Exercice 9. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^6 + x^5 + x^2 - x + 1$.

1. Montrer que f admet un unique minimum α sur $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in]0, 1[$.
2. Montrer que $f(x) \geqslant -x + 1$ pour tout $x \in [0, 1]$, en déduire que f n'a pas de zéro sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $BC = L$. On note x la longueur de AC. Démontrer que le périmètre du triangle ABC est maximal si et seulement si l'air du triangle et maximal si et seulement si le triangle ABC est isocèle.

Exercice 11 (Facultatif)**.** Soit $f : [0, 1] \to [1, 2]$ une fonction dérivable sur $[0, 1]$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$. On suppose que pour tout $t \in [0, 1]$ $|f'(t)| \leqslant 1$.
On utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $f(t) = t + 1$.