Série 1 : Suites Numériques

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite réelle definit par la relation de récurence :

$$u_{n+1} = u_n + \cos(2n+2) \qquad u_0 = 0.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite $(u_n)_n$ est-elle monotone ?
3. Montrer par récurrence sur n que $2u_n + 1 = \frac{\sin(2n+1)}{\sin(1)} \quad n \geqslant 1$.
4. En déduire que $(u_n)_n$ n'admet pas de limite.

Exercice 2. Lorsqu'un capital est placé à la banque, il produit des intérêts qui s'ajoutent au capital initial. Ce nouveau capital devient à son tour productif : on parle alors d'**intérêts composés**. Ainsi, un taux annuel de 2,5% signifie que, chaque année, le capital augmente de 2,5% de sa valeur actuelle. On considère un capital initial $C_0 = 5000$ dh, placé à un taux annuel de $r = 5\% = 0{,}05$.

1. Calculer le capital après une année, noté C_1, puis après deux années C_2, puis C_3, en supposant que les intérêts sont ajoutés à la fin de chaque année. Donner les valeurs numériques correspondantes.
2. En déduire une relation entre deux termes consécutifs C_{n+1} et C_n.
3. Exprimer le capital C_n en fonction de n et de C_0.
4. Calculer le montant récupéré après 10 ans.

Les intérêt peut être calculé plusieurs fois par an. Dans ce cas, si les intérêts sont calculés p fois par an, à chaque période on applique un taux partiel de $\frac{r}{p}$, et le capital augmente p fois dans l'année.

5. Calculer le capital $C_n^{(p)}$ après :
   — un semestre (intérêts calculés deux fois par an $p = 2$), puis deux semestres (une année).
   — un trimestre, puis une année.
   — un mois, puis une année.
   — un jour.
6. Que se passe-t-il lorsque la fréquence de calcul de l'interet devient trés grande (p trés grand) ?

Exercice 3. Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $\dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 4^n}$ 2. $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \; x \in \mathbb{R}$ 3. $\sqrt[n]{n^{2025}}$ 4. $\sin\left(\dfrac{n^2+2n+2}{n+1}\pi\right)$ 5. $\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt[3]{n^3-1}$

6. $2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$ 7. $\ln(\sqrt{n^2+1} - n)$ 8. $\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{x}}{2}\right)^n \; x > 0$

Exercice 4. On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 5. Soit $a > 0$, on se propose de calculer $\sqrt{a}$.

Méthode de Héron On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Vérifier que
$$u_{n+1}{}^2 - a = \frac{(u_n{}^2 - a)^2}{4u_n{}^2}.$$
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ $u_n \geqslant \sqrt{a}$ et que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En prenant $u_0 = 50$ et $a = 2025$ calculer u_1, u_2 et u_3. Comparer avec $\sqrt{2025}$.

Méthode de Halley On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par v_0 un réel vérifiant $\sqrt{a} > v_0 > 0$ et par la relation

$$v_{n+1} = \frac{v_n^3 + 3av_n}{3v_n^2 + a}.$$

1. Montrer que
$$v_{n+1}{}^2 - a = \frac{(v_n{}^2 - a)^3}{(3v_n^2 + a)^2}.$$
2. Montrer par récurrence que $0 \leqslant v_n \leqslant \sqrt{a}$ et que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
3. En déduire que la suite (v_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En prenant $v_0 = 40$ et $a = 2025$ calculer v_1 et v_2. Comparer avec $\sqrt{2025}$.

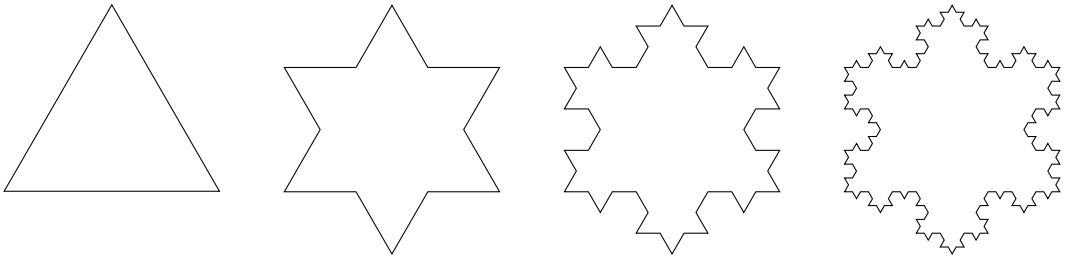
Qu'est ce que vous pensez des deux méthodes ?

Exercice 6. Soit $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}$ et la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0.2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1.
2. Démontrer que $[0, 1]$ est stable par f. Quel est le sens de variation de f sur $[0, 1]$?
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
4. Démontrer que $(u_n)_n$ est croissante, déduire qu'elle converge.
5. Determiner la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 7 (Flocon de Koch)**.** On considère un triangle équilatéral P_1 de côté 1. Chaque côté est ensuite divisé en trois parties égales et on construit à partir du segment situé au milieu de chaque côté un nouveau triangle équilatéral à l'extérieur de P_1. On obtient ainsi un polygone P_2. En procédant de la même façon à partir de P_2, on trouve un polygone P_3, puis en itérant le processus, on construit une suite de polygones P_n. On note, pour tout entier n :

* c_n Le nombre de côtés de P_n.
* l_n La longueur d'un côté de P_n.
* p_n Le périmètre de P_n.
* a_n L'aire de P_n.



1. Montrer que la suite $(c_n)_n$ est une suite géométrique et en déduire sa valeur en fonction de n.
2. Exprimer $(l_n)_n$ en fonction de n. En déduire que $(p_n)_n$ tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
4. Démontrer l'égalité pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

5. En déduire l'égalité pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right).$$

6. Quelle est la limite de $(a_n)_n$?