Université Chouaib Doukkali — **Filière IA**
Faculté des sciences El Jadida — **Année 2025/2026**
Département de mathématiques — **Analyse I**

Examen session normale (1h30)

Questions de cours (2 pts).

1. Donner la définition d'une fonction croissante f sur $I \subset \mathbb{R}$.
2. Donner un exemple d'une suite croissante non bornée.

Exercice 1 (4 pts).
Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-n}{n}$, 2. $v_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n^2}\right)\sin(n)$, 3. $w_n = (-1)^n n\left(1-\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\right)$ 4. $\begin{cases} s_{n+1} = 2s_n \\ s_0 = 1. \end{cases}$.

Exercice 2 (3 pts).
Prolonger les fonctions suivantes par continuité en x_0 quand c'est possible :

1. $f(x) = \begin{cases} -2(x-1) & \text{si} \quad x < 0, \\ \sqrt{x+1} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$ $x_0 = 0$ 2. $g(x) = \dfrac{1+x^3}{1+x^7}$ $x_0 = -1$.

Exercice 3 (4 pts).
Calculer f' pour les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arctan(e^x)$ 2. $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{2}{x^2+1}}\right)$ 3. $h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x > 0, \\ x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$

Exercice 4 (7 pts).
Soient f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{x}$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1.
2. Étudier les variations de f.
3. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.
4. Démontrer que f est une bijection de $[0, 4]$ dans un intervalle a déterminer.
5. Déduire que $(u_n)_n$ est convergente.
6. Calculer les points fixes de f.
7. Déterminer la limite de $(u_n)_n$.