Série 3 : Continuité-Dérivabilité

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3\cos(x)}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{a}E\left(\dfrac{b}{x}\right)$ $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\tan(x)-\sin(2x)}{x^3\sin(x)}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(\ln(x))}{\sqrt{x}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x\left[x-E\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right]$ 6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-1}-x$ 7. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(2\pi x)}{\sin(7\pi x)}$ 10. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$ 11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{1-\cos(2x)}$ 12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

Exercice 2. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ |\tan x|\geqslant|x|$.
2. $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}\leqslant\frac{\sin x}{x}\leqslant 1$.
3. $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \frac{x}{1+x}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x$.
4. $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ e^x\geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}$
5. $\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in[0,+\infty[,\ x^{n+1}-(n+1)x+n\geqslant 0$.

Exercice 3. Pour tout entier $n>0$ on considère la fonction $f_n:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x)=x^n-(1-x)^2.$$

1. Dans cette question, l'entier n est fixé.
   (a) Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $[0,1]$.
   (b) Déduire que f_n réalise une bijection de $[0,1]$ sur son image $f_n([0,1])$ (que l'on précisera).
   (c) Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n\in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n)=0$.
   (d) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n)<0$.
2. On considère la suite de terme général $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$.
   (a) Montrer que $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, on notera α sa limite.
   (c) Montrer que $\alpha=1$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x)=x^6+x^5+x^2-x+1$.

1. Montrer que f admet un unique minimum α sur $\mathbb{R}$, et que $\alpha\in]0,1[$.
2. Montrer que $f(x)\geqslant -x+1$ pour tout $x\in[0,1]$, en déduire que f n'a pas de zéro sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $f:[0,1]\to[1,2]$ une fonction dérivable sur $[0,1]$ vérifiant $f(0)=1$ et $f(1)=2$. On suppose que pour tout $t\in[0,1]$ $|f'(t)|\leqslant 1$.
On utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $f(t)=t+1$.

Exercice 6. On pose :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Est ce que f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Exercice 7. Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par :

$$g(x) = (x-2)e^x + (x+2) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $g \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Vérifier que $f''(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$ pour tout $x > 0$. En déduire que $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. On définit une suite $(u_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

   Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n - \ln 2| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2.$$

5. En déduire que $(u_n)_n$ converge vers $\ln 2$.