Série 2 : Suites Numériques

Exercice 1. Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $\dfrac{3^n - e^n}{3^n + e^n}$ 2. $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ $x \in \mathbb{R}$ 3. $\sqrt[n]{n^{10}}$ 4. $\sin\left(\dfrac{n^2 + 2n + 2}{n+1}\pi\right)$ 5. $\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt[3]{n^3-1}$

6. $2^n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ 7. $\ln(\sqrt{n^2+1} - n)$ 8. $\left(\dfrac{1 + \sqrt[n]{x}}{2}\right)^n$ $x > 0$ 9. $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$ 10. $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(k\pi)$

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite réelle de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(2k) = \cos(2) + \cos(4) + \cos(6) + \cdots + \cos(2n).$$

1. La suite $(u_n)_n$ est-elle monotone ?
2. Montrer par récurrence sur n que $2u_n + 1 = \frac{\sin(2n+1)}{\sin(1)} \quad n \geqslant 1$.
3. En déduire que $(u_n)_n$ diverge mais que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice 3. On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. Montrer que la limite ℓ de la suite $(u_n)_n$ est un irrationnel (exploiter l'encadrement $u_n < \ell < v_n$).

Exercice 4. Soit $a > 0$, on se propose de calculer $\sqrt{a}$.

Méthode de Héron On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que
$$u_{n+1}{}^2 - a = \frac{(u_n{}^2 - a)^2}{4u_n{}^2}.$$
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ $u_n \geqslant \sqrt{a}$ et que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En prenant $u_0 = 50$ et $a = 2024$ calculer u_1, u_2 et u_3. Comparer avec $\sqrt{2024}$.

Méthode de Halley On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par v_0 un réel vérifiant $\sqrt{a} > v_0 > 0$ et par la relation

$$v_{n+1} = \frac{v_n^3 + 3av_n}{3v_n^2 + a}.$$

1. Montrer que
$$v_{n+1}{}^2 - a = \frac{(v_n{}^2 - a)^3}{(3v_n^2 + a)^2}.$$
2. Montrer par récurrence que $0 \leqslant v_n \leqslant \sqrt{a}$ et que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
3. En déduire que la suite (v_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En prenant $v_0 = 40$ et $a = 2024$ calculer v_1 et v_2. Comparer avec $\sqrt{2024}$.

Qu'est ce que vous pensez des deux méthodes ?

Exercice 5. Soit $f(x) = (1-x)^2$ et la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0.5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que $[0,1]$ est stable par f. Quel est le sens de variation de $g := f \circ f$ sur $[0,1]$?
2. Résoudre l'équation $g(x) = x$.
3. Pour $n \geqslant 0$, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ Démontrer que $(v_n)_n$ est croissante, et déterminer sa limite. Démontrer que $(w_n)_n$ est décroissante, et déterminer sa limite.
4. Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_n$?

Exercice 6. Soit $(x_n)_n$ une suite de réels positifs, décroissante, telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \cdots + (-1)^n x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k.$$
On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. Montrer que les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

Exercice 7 (Lemme de Cesàro)**.** Soit (u_n) une suite réelle. On pose $v_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$.

1. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$).
2. Donner un exemple où (v_n) converge mais (u_n) diverge.
3. On suppose que $(u_{n+1} - u_n)_n$ tend vers 0. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_n$ tend vers 0.