Série 1 : Nombres réels

Exercice 1. 1. Démontrer que :

$$\max(x,y)=\frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y)=\frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $g(x)=\frac{|x|}{|x|+1}$. Montrer que pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ on a :

$$g(x+y)\leqslant g(x)+g(y).$$

Exercice 2. Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, un plus grand élément, une borne inférieure, un plus petit élément dans $\mathbb{R}$?

1. $[0,3[$,
2. $\{0\}\cup\,]1,2]$,
3. $\mathbb{Q}\cap[0,1/3]$,
4. $\{x\in\mathbb{R}\mid \exists n\in\mathbb{N},\ x=1/n\}$,
5. $\{\sin\left(\frac{2n\pi}{7}\right), n\in\mathbb{Z}\}$,
6. $\{\frac{n}{mn+1}, n,m\in\mathbb{N}^*\}$.

Exercice 3. Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. $A\subset B\Rightarrow \sup A\leqslant \sup B$,
2. $A\subset B\Rightarrow \inf B\leqslant \inf A$,
3. $\sup(A\cup B)=\max(\sup A,\sup B)$,
4. $\sup(-A)=-\inf A$.

Exercice 4. 1. Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2.$$

2. Déterminer les bornes supérieure et inférieure de la partie A définie par :

$$A=\{x^2+y^2|\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy=1\}.$$

Exercice 5. 1. Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$

a) A-t-on $E(nx)=nE(x)$?

b) Montrer que

$$E(x)=E\left(\frac{E(nx)}{n}\right).$$

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$E((2+\sqrt{3})^n)=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n-1.$$

Exercice 6. Soit $\varepsilon > 0$. Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ on définit les ensembles :

$$f_\varepsilon(A) = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ |y - x| < \varepsilon\} \text{ et } F_\varepsilon(A) = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ |y - x| \leqslant \varepsilon\}.$$

1. Monter que $f_\varepsilon(\emptyset) = \emptyset$ et que $F_\varepsilon(\emptyset) = \emptyset$.
2. Monter que si $A \subset B$ alors $f_\varepsilon(A) \subset f_\varepsilon(B)$ et que $F_\varepsilon(A) \subset F_\varepsilon(B)$.
3. Montrer que
   a) Si A est un intervalle alors $f_\varepsilon(A)$ et $F_\varepsilon(A)$ sont des intervalles.
   b) Si A est un segment alors $F_\varepsilon(A)$ est un segment.
4. Calculer $f_{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})$ et $F_{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})$.
5. Si $F_\varepsilon(A)$ est un segment pour un certain $\varepsilon > 0$ est ce qu'ont peut dire que A est un segment, un intervalle ?
6. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ $f_\varepsilon(\mathbb{Q}) = F_\varepsilon(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.
7. Si $f_\varepsilon(A)$ est un intervalle pour tout $\varepsilon > 0$ est ce qu'ont peut dire que A est un intervalle ?