Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Filière IA
Année 2024/2025
Analyse I

Examen session rattrapage (1h30)

Questions de cours (5 pts)

1. Donner la définition d'une fonction continue en $x_0 \in I$.
2. Une suite (u_n) croissante tel que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, est ce qu'elle est positive ?
3. Donner un exemple d'une suite qui vérifie $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}$.
4. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
5. Donner l'expression de la dérivée de la fonction $\arctan(x)$.

Exercice 1 (4 pts).
Déterminer les limites suivante :

$$1.\ \lim_{x\to 0} \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{x}\right), \qquad 2.\ \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1}, \qquad 3.\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin(2x)}, \qquad 4.\ \lim_{x\to 0} \frac{E(x)}{x}.$$

Exercice 2 (11 pts).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
2. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ vers $\mathbb{R}\setminus\{4\}$.
3. Montrer que f admet exactement deux points fixes sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Soit la suites réelles $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)\ .$$

4. Montrer que $f([2,+\infty[) = [2,4[$.
5. Calculer u_1 en déduire que $(u_n)_n$ est décroissante.
6. Montrer que $2 \leqslant u_n \leqslant 4$ en déduire que $(u_n)_n$ est convergente, déterminer sa limite.

On définit une suite $(v_n)_n$ à partir de $(u_n)_n$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

7. Démontrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique.
8. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
9. En déduire la valeur de $(u_n)_n$ en fonction de n .
10. Retrouver la valeur de la limite de $(u_n)_n$.
11. En déduire la borne supérieure et borne inférieure de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$:

$$A = \{u_n\ :\ n \geqslant 1\}.$$