Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Filière IA
Année 2024/2025
Analyse I

Examen session normale (1h30)

Questions de cours (5 pts)

1. Donner la définition d'une suite qui converge vers $l \in \mathbb{R}$.
2. Une suite (u_n) est majorée à partir d'un certain rang, est ce qu'elle est majorée ?
3. Donner un exemple d'une fonction continue non dérivable.
4. Énoncer le théorème des accroissements finies.
5. Donner l'expression de la dérivée de la fonction bijection inverse f^{-1}.

Exercice 1 (4 pts).
Déterminer les limites quand $n \to +\infty$:

$$1.\ \sqrt[n]{n^2}, \qquad 2.\ n^2\left[\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right], \qquad 3.\ n\sin\left(\frac{2n^2+1}{n}\pi\right), \qquad 4.\ \frac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)}.$$

Exercice 2 (11 pts).
Pour $n \geqslant 1$, on considère la fonction polynomiale

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1.$$

1. Donner la définition d'une fonction strictement croissante.
2. Montrer que P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. En déduire que P_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle que l'on précisera.
4. Démontrer que P_n possède une seule racine dans $[0, 1]$, que l'on note u_n.
5. Calculer u_1, u_2.
6. Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
7. Montrer que pour $x \neq 1$ on a
$$P_n(x) = \frac{2x - 1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$
8. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
9. Soit $r \in]\frac{1}{2}, 1[$. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} P_n(r) > 0$.
10. Démontrer que $(u_n)_n$ converge vers $\frac{1}{2}$.
11. En déduire la borne supérieure et borne inférieure de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$:
$$A = \{u_n \ :\ n \geqslant 2\}.$$