Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Filière SMPC
Année 2022/2023
Analyse II

Examen de Rattrapage (1h30)

L'usage de calculatrices est interdit !

Question de Cours : Calculer la limite de la somme suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}}, \text{ avec } p > 0.$$

Exercice 1.

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$a)\ \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx \quad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}dx \quad c)\ \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx.$$

2. Donner la nature des intégrales suivantes :

$$d)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \qquad e)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx \qquad f)\ \int_0^{+\infty} x^2\cos(x)e^{-x^2}dx.$$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(2x) \qquad (E).$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière de (E).
3. En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Exercice 3. On pose

$$I = \int_1^2 \frac{dt}{2+\sqrt{t(4-t)}}.$$

1. Décomposé en éléments simple la fraction :

$$\frac{4x}{(1+x)^2(1+x^2)}.$$

2. En utilisant le changement de variable $t = 2(1+\cos(u))$. Montrer que

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin(u)}{1+\sin(u)}du.$$

3. En utilisant le changement de variable $v = \tan(u/2)$ Montrer que

$$I = 2\int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{1+v^2} - \frac{1}{(1+v)^2}\right)dv.$$

4. Déduire que :

$$I = \frac{\pi}{6} - 2 + \sqrt{3}.$$