Université Chouaib Doukkali — **Filière SMPC**
Faculté des sciences El Jadida — **Année 2022/2023**
Département de mathématiques — **Analyse II**

Examen session normale (1h30)

L'usage de calculatrices est interdit !

Exercice 1.
Soit l'équation différentielle

$$xf'' + 2(x+1)f' + (x+2)f = e^{-x} \quad (A)$$

1. Déterminer le type de l'équation différentielle (A).
2. En posant $z(x) = xf(x)$, vérifier que z est solution de l'équation :
$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \quad (B)$$
3. Résoudre l'équation différentielle (B).
4. En déduire l'ensemble des solutions de (A).

Exercice 2.

1. Vérifier que $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x)} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x}\right)$.
2. Étudier la nature des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{1+x^2}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x}dx$.
3. Peut-on en déduire, des questions précédentes, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x)}dx$? Justifier votre réponse.
4. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x)^2}dx$.
5. Calculer $I = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)(1+x)}dx$.
6. En déduire $J = \displaystyle\int \frac{\arctan x}{(1+x)^2}dx$. (*Utiliser une intégration par partie*).
7. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x)^2}dx$.
8. Considérons l'équation différentielle suivante :
$$(x+1)y' + y = \frac{\arctan x}{(1+x)^2} \quad (E)$$
   a) Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.
   b) Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 2$.
9. Considérons l'équation différentielle suivante
$$(x+1)y' - y = -\frac{\arctan x}{(1+x)^2}y^2 \quad (F)$$
   a) Déterminer le type de l'équation différentielle (F).
   b) Résoudre l'équation différentielle (F) sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$.