Série 3 : Équations Différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I :

1. $y' + 2y = x, \quad I = \mathbf{R}$
2. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}, \quad I = \mathbf{R}$
3. $y'\cos(x) + y\sin(x) = 1, \quad I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
4. $xy' - y = x\ln x, \quad I =]0, +\infty[$
5. $x(x^2+1)y' - 2y = x^3(x-1)e^{-x} \quad I = \mathbf{R}$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 1$
2. $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
3. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$
4. $y'' + y' + y = e^x\cos(x)$
5. $y'' - 2y' + 5y = -4e^x\sin(2x)$
6. $y'' + 2y' + y = \cosh(x)$
7. $y'' + 4y = \tan(x)$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 4y = xe^x \ (E)$$

1. Déterminer les solutions de (E).
2. Déterminer les solutions de (E) vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$
3. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ deux fois dérivable vérifiant

$$t^2 f''(t) - 3tf'(t) + 4f(t) = t\ln(t)$$

On pose $g(x) = f(e^x)$
a) Calculer pour $x \in \mathbf{R}$, $g'(x)$ et $g''(x)$.
b) Vérifier que g est solution de (E).
c) En déduire l'expression de f.

Exercice 4. Soit l'équation différentielle

$$2y'\cos x - 2y\sin x = y^2 \quad (E)$$

1. Trouver la solution générale de (E).
2. Soit l'équation de Riccati définie par

$$2y'\cos x = y^2 + 2\cos^2 x - \sin^2 x \quad (F)$$

a) Vérifier que $y_0 = \sin x$ et une solution particulière de (F).
b) En utilisant le changement de variable $u = y - y_0$, vérifier que u est solution de l'équation (E).
c) En déduire la solution générale de (F).