Série 2 : Intégrale Généralisée

Exercice 1. Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2+1}dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt, \quad \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}(1-t)}dt.$$

Exercice 2. Donner la nature calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt, \quad \int_0^{\pi/2} \tan t dt, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt, \quad \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2}, \quad \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt, \quad \int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{t}\right)dt.$$

Exercice 3 (Intégrales de Bertrand)**.** Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de

$$I_1 = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \quad \text{et } I_2 = \int_0^{1/e} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}.$$

1. On suppose $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale I_1 étudiée est convergente, et que I_2 est divergente.
2. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que l'intégrale I_2 est convergente, et que I_1 est divergente.
3. On suppose $\alpha = 1$. Calculer une primitive de $\dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$ en déduire la nature des intégrales I_1 et I_2 en fonction de β.

Exercice 4.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \big(\arctan(t+1) - \arctan(t)\big)dt$ est convergent.
2. Montrer que
$$\lim_{u\to+\infty} \int_u^{u+1} \arctan(t)dt = \frac{\pi}{2}$$
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \big(\arctan(x+1) - \arctan(x)\big)dx$.

Exercice 5. Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx, \quad J_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt.$$

Exercice 6. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}dt, \quad \int_0^{+\infty} \ln\Big(\frac{1+t^2}{1+t^3}\Big)dt, \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt.$$

Exercice 7. Montrer que les deux intégrales sont convergent :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}, \text{ et } I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$$

En utilisant le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, calculer I_1 et I_2.

Exercice 8. Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}, \quad \int_0^{+\infty} \left(1 + t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right)dt, \quad \int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+ax}\right)dx, \ a \in \mathbb{R}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{-1/t} - \cos\frac{1}{t}\right)dt, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt$$