Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Filière SMPC
Année 2022/2023
Analyse II

Série 1 : Calcul intégral

Exercice 1. En utilisant les sommes de Riemann, calculer la limite des suites suivantes :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}, \qquad v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}, \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}.$$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^2 t^3 dt, \quad \int_1^3 (1-2t)^2 dt, \quad \int_0^{\pi/4} \cos(2t) - \sin(3t) dt, \quad \int_1^5 \frac{\sqrt{t}-1}{t^2} dt, \quad , \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{2t}}, \quad \int_{-1}^1 t\sqrt{\ln(1+t^2)} dt.$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2(t) dt, \qquad \int_0^{2\pi} \cos(2t)\sin(t) dt, \qquad \int_0^{\pi/4} \sin(t)\tan^2(t) dt, \qquad \int_0^2 t\tanh(t^2) dt.$$

Exercice 4. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos(3x+\pi), \quad f_2(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \quad f_3(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+6}}, \quad f_4(x) = \frac{e^{2x}}{1-e^x},$$

$$f_5(x) = \frac{e^{2x+3}}{e^{2x}-e^x}, \qquad f_6(x) = \frac{1}{x\ln(x^3)}.$$

Exercice 5 (Intégration par parties)**.** Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^2 t^3 e^t dt, \quad \int_1^2 (\ln(t))^2 dt, \quad \int_1^e \sin(\ln(t)) dt, \quad \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt, \quad \int_0^1 t(\arctan t)^2 dt.$$

Exercice 6. En effectuant un changement de variables adéquat, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt, \quad \int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}, \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt, \quad \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1} dt, \quad \int_0^{\pi/6} \frac{dt}{\cos t}, \quad \int_1^2 \frac{2t}{\sqrt{1+t}} dt \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}.$$

Exercice 7. Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2+4}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}, \quad f_3(x) = \frac{1}{4-x^2}, \quad f_4(x) = \frac{2x}{x^2-x+1},$$

$$f_5(x) = \frac{2x+1}{x^2+2x-3}, \quad f_6(x) = \frac{4x^2}{x^4-1}, \quad f_7(x) = \frac{2}{x^3-1}.$$

Exercice 8. 1. Calculer la dérivé de la fonction suivante $h(x) = \int_{\cos x}^{1+e^x} \frac{dt}{1+\sin(t)}$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $[0, b]$, on suppose que $f(0) = 0$ et que $f'(x) > 0$ pour $x \in [0, b]$. Montrer que pour tout $a \in [0, b]$ on a

$$\int_0^a f(t)dt + \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)dt = af(a).$$

3. En déduire une primitive des fonctions

$$f_1(x) = \arctan(x), \qquad f_2(x) = \operatorname{argth}(x).$$

4. Calculer pour $x < \sqrt{2}$

$$\int_0^x \frac{t^2}{2 - t^2} dt,$$

5. En déduire une primitive de la fonction

$$\sqrt{\frac{2x}{1 + x}}.$$