Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Filière SMA6
Année 2024/2025
Analyse Complexe

Examen session rattrapage (1h30)

Questions de cours

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$.
2. Énoncer la formule d'Hadamard. Calculer le rayon de convergence de la série : $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{e^n}$.
3. Donner les expressions de ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$ en fonction de ∂_x et ∂_y. Exprimer les équations de Cauchy-Riemann en fonction de ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$.

Exercice 1.
Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur $D_R := \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < R\}$.
On désigne par u la partie réelle de f, $M_f(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ et $A_f(r) = \sup_{|z|=r} |u(z)|$.

1. a) Énoncer l'inégalité de Cauchy.
   b) En déduire que si f est une fonction entière tel que $\lim_{r\to\infty} \frac{M_f(r)}{r^k} = 0$.
   Alors f est un polynôme de degré inférieur à k.
2. a) Montrer que la fonction $r \mapsto M_f(r)$ est croissante.
   b) En déduire que la fonction $r \mapsto A_f(r)$ est aussi croissante. (Ind. $g(z) = e^{f(z)}$)
3. On suppose que $a_0 = 0$ ($f(0) = 0$), et qu'il existe une constante $A > 0$ tel que $A_f(r) \leqslant A$.
   a) Énoncer le lemme de Schwarz.
   b) En déduire que si $h : D_R \to D_1$ tel que $h(0) = 0$. Alors
   $$|h(z)| \leqslant \frac{|z|}{R}.$$
   c) On pose $g(z) = \frac{f(z)}{2A - f(z)}$, vérifier que g est holomorphe sur D_R.
   d) Montrer que $g(D_R) \subset D_1$, en déduire que
   $$|g(z)| \leqslant \frac{|z|}{R} \qquad |z| < R.$$
   e) Démontrer que
   $$M_f(r) \leqslant \frac{2Ar}{R-r}, \qquad r < R.$$
4. On suppose que f est une fonction entière, montrer que pour tout $r > 0$:
   $$M(r) \leqslant 2A_f(2r) + 3|f(0)|.$$
   (Ind. Poser $g(z) = f(z) - f(0)$ et $R = 2r$, utiliser la question 3.e).)
5. En déduire que si f est une fonction entière tel que $\lim_{r\to\infty} \frac{A_f(r)}{r^k} = 0$.
   Alors f est un polynôme de degré inférieur à k.

Exercice 2.
On désigne par γ le cercle de centre 0 et rayon 3/2 parcouru dans le sens direct. Calculer

$$I = \int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z-2)^4(z-i)^3} dz.$$