Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Filière SMA6
Année 2024/2025
Analyse Complexe

Examen session normale (1h30)

Questions de cours

1. Énoncer le principe de prolongement analytique.
2. Donner un exemple d'une suite $(z_n)_n$ de nombre complexe qui converge vers $z \in \mathbb{C}$ mais tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Arg}(z_n) \neq \mathrm{Arg}(z)$.
3. Donner un exemple d'une fonction holomorphe sur un domaine $G \subset \mathbb{C}$ qui n'admet pas de primitive sur G.
4. Démontrer le théorème fondamental d'algèbre.

Exercice 1.
Soit $a \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$. On pose

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\ , \quad z \in \mathbb{D}.$$

1. Montrer que $|\varphi_a(\zeta)| = 1$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. En déduire que $|\varphi_a(z)| < 1\ \forall z \in \mathbb{D}$.
2. Montrer que $\varphi_a : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est bijective et déterminer φ_a^{-1}.
3. Soit $a, b \in \mathbb{D}$ montrer qu'il existe $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ et $c \in \mathbb{D}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$\varphi_a \circ \varphi_b(z) = \lambda.\varphi_c(z).$$

4. En déduire que $G = \{\lambda\varphi_a\ /\lambda \in \partial\mathbb{D},\ a \in \mathbb{D}\}$ est un groupe pour la composition.
5. Soit $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ bijective. Posons $b = f(0)$ et $F = \varphi_b \circ f$. Montrer que $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ bijective et que $|F(z)| \leqslant |z|\ \ \forall z \in \mathbb{D}$.
6. En déduire que $f \in G$.

Exercice 2.
Calculer les intégrales suivantes avec $x > 0$

1. $I_x = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + xe^{it}\right) e^{-2it} dt.$
2. $J_x = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{t^4+1} dt.$