Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Filière SMA6
Année 2024/2025
Analyse Complexe

Série 4

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \log\left(1+r^2-2r\cos t\right)dt$, pour tout $r \in]0,1[$.
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(nt-\sin t)\,dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\cos(-nt+\cos t)\,dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\cos t + i\sin t)}{\cos 2t + i\sin 2t}dt$.

Exercice 2.
Soit $a \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}/|z|<1\}$. On pose

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\ , \quad z \in \mathbb{D}.$$

1. Montrer que $|\varphi_a(\zeta)| = 1$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. En déduire que $|\varphi_a(z)| < 1\ \forall z \in \mathbb{D}$.
2. Montrer que $\varphi_a : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est bijective et déterminer φ_a^{-1}.
3. Soit $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ bijective. Posons $b = f(0)$ et $F = \varphi_b \circ f$. Montrer que $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ bijective et que $|F(z)| \leqslant |z|\ \ \forall z \in \mathbb{D}$.
4. En déduire qu'il existe $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ et $a \in \mathbb{D}$ tels que $f = \lambda\varphi_a$ sur $\mathbb{D}$.

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, vérifiant $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f(a) = 0$.
2. Montrer que f admet un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C}$.
3. Notons par $a_1 \cdots, a_p$ les zéros de f, $m_1, \cdots, m_p$ les multiplicités correspondantes. Montrer qu'il existe g holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = (z-a_1)^{m_1}\cdots(z-a_p)^{m_p}g(z)\ , \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

   avec $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

4. Posons $P(z) = \displaystyle\prod_{j=1}^{p}(z-a_j)^{m_j}$, $z \in \mathbb{C}$ et $h = \dfrac{1}{g}$ sur $\mathbb{C}$.
   i) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que si $m = m_1 + \cdots m_p$, on a

$$|h(z)| \leqslant C(1+|z|)^m\ , \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

ii) Montrer que h est un polynôme et $\deg h \leqslant m$.

5. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f = \lambda P$.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et bijective.

1. Montrer que pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$, $f^{-1}(K)$ est aussi compact dans $\mathbb{C}$.
2. Posons $\varphi(z) = f\big(\frac{1}{z}\big)$, pour $z \in \mathbb{D}^*$.
   i) Montrer que $z_0 = 0$ n'est pas un point régulier de φ.
   ii) Montrer que $z_0 = 0$ ne peut pas être un point singulier essentiel de φ.
   iii) En déduire que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$.
3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ unique tel que $f(a) = 0$, de multiplicité $m = 1$.
4. Montrer qu'il existe g holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = (z-a)g(z)\ , \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

   avec $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
5. Posons $h(z) = \dfrac{1}{g(z)}$ pour $z \in \mathbb{C}$.
   i) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|h(z)| \leqslant C(1 + |z|)\ , \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

   ii) Montrer que h est un polynôme et $\deg h \leqslant 1$.
6. En déduire que $f(z) = \alpha z + \beta$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.

Exercice 5.
Donner le développement en série de Laurent des fonctions suivantes :

1. Dans : $\mathbb{C}^*$,

$$f(z) = \sin\Big(\frac{z-1}{z}\Big).$$

2. Dans : $\mathbb{D} = D(0,1)$, $C_1 = C(0,1,2)$, $C_2 = C(0,2,+\infty)$.

$$g(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{2-z}$$

3. Dans : $C_1 = C(0,1,+\infty)$, $C_2 = C(0,0,1)$.

$$h(z) = \frac{1}{1-z}\exp(\frac{1}{z}).$$

Exercice 6.
Soit $a, b \in \mathbb{C}$ vérifiant $|a| < |b|$, et soit $m \in \mathbb{N}^*$ un entier. Notons par $C(0,R) = \{z \in \mathbb{C}/|z| = R\}$ le cercle de centre 0 et de rayon $R > 0$. Considérons l'intégrale

$$I_R(a,b) = \int_{C(0,R)} \frac{dz}{(z-a)^m(z-b)}.$$

Calculer la valeur de $I_R(a,b)$ en fonction de R.

Exercice 7.
En utilisant le théorème des résidus, calculer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}, \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+1}dx, \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}dx, \quad L = \int_0^{2\pi} \cos^3(t)+\sin^2(t)dt$$

$$M = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\sin t}, \qquad N = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}dx, \qquad O_a = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(at)}{1+t^2}dt \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Exercice 8.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-2\pi i t x} dt$.

1) Justifier l'existence de f.
2) Montrer que $f(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos(2\pi t x)\, dt$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $g(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$. Soient $a > 0$ et $\gamma = \gamma_1.\gamma_2.\gamma_3.\gamma_4$ le chemin défini par $\gamma_1(t) = t,$ pour $t \in [-r, r],$ $r > 0$, $\gamma_2(t) = r + it,$ pour $t \in [0, 2\pi a]$, $\gamma_3(t) = t + 2\pi a i,$ pour $t \in [-r, r]$, et $\gamma_4(t) = -r - it,$ pour $t \in [-2\pi a, 0]$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_\gamma g(z)\, dz = 0$.
4) Montrer que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_2} g(z)\, dz = 0$ et $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_4} g(z)\, dz = 0$.
5) Montrer que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_3} g(z)\, dz = \sqrt{2\pi}$.
6) Montrer que $f(a) = \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 a^2}$. En déduire $f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 x^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{e^{iz}-1}{z}$.

1) Montrer que f est prolongeable en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2) Soit $\gamma = \gamma_1.\gamma_2$ le chemin défini par $\gamma_1(t) = t,$ pour $t \in [-R, R]$ et $\gamma_2(t) = Re^{it},$ pour $t \in [0, \pi]$. Montrer que

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = 2i \int_0^R \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz - i\pi.$$

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10.
Soient $a, b \in]0, +\infty[$ et Λ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1. Trouver un chemin γ dans $\mathbb{C}$ d'image Λ.
2. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$. En déduire que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Exercice 11.
Pour $a > |b| > 0$, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Exercice 12.
Pour Re $z > 1$ et $n \geqslant 1$, on pose

$$f_n(z) = \frac{1}{n^z} = e^{-z\log n}$$

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur tout demi-plan $\Pi_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 1 + \varepsilon\}$, $(\varepsilon > 0)$.
2. Montrer que la fonction $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ est holomorphe sur $U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 1\}$ et on a

$$f^{(k)}(z) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^z}.$$

Exercice 13.
Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie par

$$f_0(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{et} \quad f_n(z) = \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad \text{si } n \geqslant 1.$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
2. Étudier la convergence uniforme sur un disque fermé $\overline{D(z_0, r)} \subset U$.
3. Montrer que la somme F de la série $\sum f_n$ est holomorphe sur U et on a

$$F'(z) = \frac{-1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2} \right), \quad \text{pour tout } z \in U.$$