Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

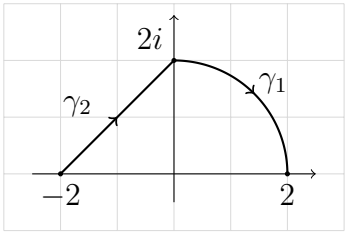
Filière SMA6
Année 2024/2025
Analyse Complexe

Série 3

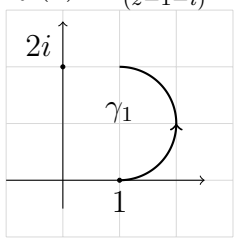
Exercice 1.
Calculer l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ dans les cas suivants :

$$a)\begin{cases} f(z)=|z| \\ \gamma(t)=2it-i\ ;\ t\in[0,1]\end{cases} \quad b)\begin{cases} f(z)=|z| \\ \gamma(t)=e^{it}\ ;\ t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\end{cases} \quad c)\begin{cases} f(z)=\frac{e^z}{1+z^2} \\ \gamma(t)=1+e^{it}\ ;\ t\in[0,2\pi]\end{cases}$$

$d)$ $f(z)=|z|^2$



$e)$ $f(z)=\frac{z}{(z-1-i)^2}$



Exercice 2.
Soit $a,b\in\mathbb{C}^*$ vérifiant $|a|<|b|$. Considérons l'intégrale

$$I_R(a,b)=\int_{C(0,R)}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}.$$

Calculer la valeur de $I_R(a,b)$ en fonction de R.

Exercice 3.
Soit $\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$ un chemin fermé lisse, soit $a\in\mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$. On note l'indice de a par rapport à γ par l'expression

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a):=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a}.$$

1. Montrer que l'indice est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$.
2. Déduire que $\mathrm{Ind}_\gamma(a)=0$ sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$.
3. Montrer que si γ est homotope a γ' dans $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ alors

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a)=\mathrm{Ind}_{\gamma'}(a)\qquad a\in\mathbb{C}.$$

Exercice 4.

a) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme, $a\in\mathbb{C}$ et $R>0$. Montrer que

$$\int_{\mathcal{C}(a,R)}\overline{P(z)}dz=2\pi iR^2\overline{P'(a)}.$$

b) Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé lisse ($\gamma(t) = x(t) + iy(t)$). On note :

$$A(\gamma) = \frac{1}{2i} \int_\gamma \overline{z} dz.$$

1. Montrer que $A(\gamma) \in \mathbb{R}$ et que

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} dt.$$

2. En utilisant la formule de Green, Justifier que $A(\gamma)$ peut être interprétée comme l'aire délimitée par γ comptée positivement ou négativement en fonction de l'orientation de γ.

c) On suppose que f est injectif holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D(0,1)}$ montrer que la surface A_f du domaine $f(D(0,1))$ vaut :

$$A_f = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})} f'(e^{it}) dt.$$

En déduire que si $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est le développement de f au voisinage de 0 alors :

$$A_f = \pi \sum_{n \geqslant 1} n |a_n|^2.$$

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ et $R > 0$ tels que $R > \max(|a|, |b|)$. Notons $\mathcal{C}(0,R) = \{\zeta \in \mathbb{C} / |\zeta| = R\}$.

1. Montrer que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(0,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - b)(\zeta - a)} d\zeta.$$

2. En déduire que

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{|b-a|}{2\pi} \frac{R}{(R - |b|)(R - |a|)} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})| dt$$

3. Redémontrer le théorème de Liouville.

Exercice 6 (Intégrale de Fresnel)**.**
Considérons les intégrales convergentes suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx \ , \qquad J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \ , \qquad G = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

En intégrant la fonction $f(z) = \exp(-z^2)$ sur le bord ∂K_R du secteur angulaire

$$K_R = \left\{ z = re^{i\theta} / 0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \right\},$$

calculer les valeurs de I et J.
Indication : utiliser la relation $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t$, $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.