Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Filière SMA6
Année 2024/2025
Analyse Complexe

Série 2

Exercice 1.

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de nombres positifs Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} u_n v_n \leqslant \left(\limsup_{n\to\infty} u_n\right)\left(\limsup_{n\to\infty} v_n\right).$$

   En déduire que si $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ à un rayon de convergence R_A et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ à un rayon de convergence R_B alors :

$$\text{Le rayon de convergence R de la série } \sum_{n\geqslant 0} a_n b_n z^n \text{ vérifie } R \geqslant R_A R_B.$$

2. Si $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ tend vers un nombre R alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est égale à R.
3. Calculer le rayon de convergence des séries :

$$a)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^n} \quad b)\ \sum_{n\geqslant 1} q^{n^2} z^{2^n} \quad c)\ \sum_{n\geqslant 1} \cos(in) z^n \quad d)\ \sum_{n\geqslant 1} 2^n z^{n!} \quad e)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{(3+(-1)^n)^n}.$$

Exercice 2.

1. a) Donner la série entière en 0 de la fonction $f(z) = e^z \sin(z)$.
   b) Donner le rayon de convergence de cette série.
   c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin^{(k)}(0) = 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

2. a) Montrer que la suite des coefficients $(c_n)_n$ de la série entière en 0 de la fonction :

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n,$$

   est la suite de Fibonacci (i.e) $c_0 = c_1 = 1$ et $c_n + c_{n+1} = c_{n+2}$.
   b) En déduire la formule de Binet :

$$c_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right).$$

   c) Donner le rayon de convergence de cette série.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}dt = \delta_{n,0}.$$
2. On déduire que si $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ à un rayon de convergence R alors pour tout $r \in [0, R[$ on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n}.$$
3. Montrer que :
$$\lim_{r\to R^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sup_{r\in[0,R[} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt.$$

Exercice 4.

1. Déterminer est ce que les fonctions suivantes sont analytiques ainsi sur quel domaine
$$a)\ \frac{1}{z}, \qquad b)\ \overline{z}, \qquad c)\ \frac{1}{z^2-5z+6}, \qquad d)\ \sum_{n\geqslant 0} z^{n!}, \qquad e)\ \frac{e^z}{z^2+1}.$$
2. Existe-t-il une fonction analytique f définie sur un ouvert connexe U contenant 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \in U$ on ait :
$$a)\ f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n^2}, \qquad b)\ f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{-1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 5.

Soit $f(z)$ la somme de la série entière $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ et $Z \in \mathbb{C}$ supposée convergente sûr le disque ouvert $D(0,1)$.
Montrer que, si les conditions suivantes sont remplies :
$$a_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 2} n|a_n| \leqslant |a_1|,$$
alors f est injective sur $D(0,1)$ et que de plus la série est convergente sur le disque fermé.