Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Filière SMA6
Année 2024/2025
Analyse Complexe

Série 1

Exercice 1 (Théorème de Ptolémée)**.**
Soit A, B, C, D quatre points du plan d'affixe $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

1. Démontrer que :
$$|c-a||d-b| \leqslant |a-b||c-d| + |b-c||d-a|.$$
2. Quand est ce que $|w+z| = |z| + |w|$ pour $z, w \in \mathbb{C}$?
3. En déduire que les points sont cociclique si et seulement si :
$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD.$$

Exercice 2. 1. Simplifier les expressions suivantes :

$$a)\ \sum_{k=0}^{n} \cos(\theta + k\alpha) \qquad b)\ \sum_{k=0}^{n} \sin(\theta + k\alpha) \qquad c)\ \mathrm{Re}\left(\frac{1 + i\tan(\theta)}{1 - i\tan(\theta)}\right).$$

2. On considère $|a| < 1$, Déterminer les nombres complexes z vérifiant
$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leqslant 1.$$
3. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$:
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k}\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right).$$

Exercice 3. 1. Calculer les limites ($\alpha > 0$)

$$a)\ \frac{(\cos t + i \sin t)^n}{n^\alpha} \qquad b)\ \frac{(1+i)^n}{n^\alpha} \qquad c)\ n^\alpha \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \qquad d)\ \frac{in^2 - (i+1)n + 1}{(2n-i)(n-5i)}.$$

2. Montrer que $(z_n)_n$ converge vers $z \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|$ et $Arg(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} Arg(z)$.

Exercice 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x\sin x\cosh y + y\cos x\sinh y}{x^2+y^2}, \frac{x\cos x\sinh y - y\sin x\cosh y}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ (1,0) & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les dérivées partielles des composantes de f.

3. Étudier l'holomorphie de f.
4. Vérifier que $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, en déduire l'expression de la différentielle en fonction de z.

Exercice 5. Soit $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe, trouver v la partie imaginaire de f pour que f soit holomorphe :

$$a)\ u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \qquad b)\ u(x,y) = e^x \cos(y) \qquad ,c)\ u(x,y) = x^2 + y^2.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, donnée par la relation :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^3}{|z|^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{C}$. Déterminer $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$.
b) Montrer que f satisfait les conditions de Cauchy-Riemann au point $(0,0)$, mais que f n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en $(0,0)$.

Exercice 7.
1. Montrer que si f est Holomorphe et de classe $\mathcal{C}^2$ sur un domaine alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ vérifie l'équation de Laplace :
$$\Delta f = 0.$$
2. Donner L'expression des équation de Cauchy-Riemann et l'équation de Laplace en coordonné polaire.
3. Déduire que $g(z) = f(|z|)$ est holomorphe sur un domaine si et seulement si $g = C^{te}$.