Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Filière Math S5
Année 2026/2027
Analyse complexe

Série 1

Exercice 1 (Théorème de Ptolémée)**.** Soient A, B, C, D quatre points du plan complexe d'affixes respectives $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

1. Démontrer l'inégalité géométrique suivante :
$$|c-a||d-b| \leqslant |a-b||c-d| + |b-c||d-a|$$
2. Donner la condition nécessaire et suffisante sur $z, w \in \mathbb{C}$ pour que $|z+w| = |z| + |w|$.
3. En déduire que les points A, B, C, D sont cocycliques (ou alignés) dans cet ordre si et seulement si :
$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$$

Exercice 2.
1. Simplifier les expressions suivantes ($\theta, \alpha \in \mathbb{R}$) :
   (a) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)$
   (b) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(\theta + k\alpha)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \sin(\theta + k\alpha)$
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $|a| < 1$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que :
$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leqslant 1$$
3. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour tout $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$:
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k}\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)$$

Exercice 3.
1. Étudier la convergence des suites complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies ci-dessous ($\alpha > 0$, $t \in \mathbb{R}$) :
   (a) $z_n = \dfrac{(\cos t + i \sin t)^n}{n^\alpha}$
   (b) $z_n = n^\alpha \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$
   (c) $z_n = \dfrac{in^2 - (i+1)n + 1}{(2n-i)(n-5i)}$
2. Soit $(z_n)_n$ une suite de $\mathbb{C}^*$ et $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer que si $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|$ et $\operatorname{Arg}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Arg}(z)$, alors $(z_n)_n$ converge vers z.
3. Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ identifiée à une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$f(x,y) = \left(e^{x^2-y^2}\cos(2xy)\,,\, e^{x^2-y^2}\sin(2xy)\right)$$

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que f satisfait les conditions de Cauchy-Riemann sur tout $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et exprimer $f(z)$ ainsi que sa dérivée complexe $f'(z)$ en fonction de la variable z.

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{e^z - 1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Soient u et v les parties réelle et imaginaire de f.

1. Donner l'expression explicite de $u(x,y)$ et $v(x,y)$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$.
2. Montrer que f est continue au point $z = 0$.
3. En utilisant la définition par le taux d'accroissement, calculer :
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)$$
4. Les conditions de Cauchy-Riemann sont-elles vérifiées en $(0,0)$? La fonction f est-elle $\mathbb{C}$-dérivable en 0 ?
5. Justifier brièvement que f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Que peut-on conclure sur l'holomorphie de f sur $\mathbb{C}$ tout entier ?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3}{|z|^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{C}$. Expliciter $u(x,y) = \mathrm{Re}(f)$ et $v(x,y) = \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer que f satisfait les équations de Cauchy-Riemann au point $(0,0)$.
3. Étudier la $\mathbb{C}$-dérivabilité de f en $(0,0)$. Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 7.

1. Montrer que si $f = u + iv$ est holomorphe et de classe $\mathcal{C}^2$ sur un domaine Ω, alors u et v vérifient l'équation de Laplace :
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
2. Pour chacune des fonctions $u(x,y)$ suivantes, trouver la condition sur les constantes ou déterminer une fonction $v(x,y)$ pour que $f = u + iv$ soit holomorphe :
   (a) $u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$
   (b) $u(x,y) = e^x \cos(y)$
3. Donner l'expression des équations de Cauchy-Riemann et du Laplacien Δ en coordonnées polaires (r,θ).
4. En déduire que si une fonction $g(z) = f(|z|)$ est holomorphe sur un domaine, alors g est nécessairement constante.