Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences El Jadida
Département de Mathématiques

Filière Math 5
Année 2025/2026
Analyse Complexe

Examen session rattrapage (1h30)

Questions de cours

1. Énoncer le théorème de Liouville.
2. Donner les expressions de ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$ en fonction de ∂_x et ∂_y. Exprimer les équations de Cauchy-Riemann en fonction de ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$.

Exercice 1.
Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ la bande ouverte verticale comprise entre les droites d'abscisse 0 et 1. Soit $\bar{\Omega}$ son adhérence. On considère une fonction f continue et bornée sur $\bar{\Omega}$, et holomorphe sur Ω.
On définit pour $x \in [0,1]$ la fonction $M(x)$ par :

$$M(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x+iy)|$$

On suppose que $|f(z)| \leqslant M_0$ pour tout z tel que $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $|f(z)| \leqslant M_1$ pour tout z tel que $\mathrm{Re}(z) = 1$, avec $M_0 > 0$ et $M_1 > 0$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. On considère la fonction auxiliaire $f_\varepsilon(z) = f(z)e^{\varepsilon z^2}$.
   (a) Déterminer le module de $e^{\varepsilon z^2}$ en posant $z = x + iy$.
   (b) Montrer que $\lim_{|y| \to +\infty} |f_\varepsilon(x+iy)| = 0$ uniformément pour $x \in [0,1]$.
   (c) En déduire qu'il existe un compact K de la forme $[0,1] \times [-A, A]$ tel que le maximum de $|f_\varepsilon|$ sur la bande $\bar{\Omega}$ soit atteint sur ce compact K.
2. En appliquant le principe du maximum, montrer que pour tout $z \in \bar{\Omega}$:

   $$|f_\varepsilon(z)| \leqslant \max(M_0, M_1 e^{\varepsilon})$$

   (Indication : Justifier que le supremum de $|f_\varepsilon|$ ne peut pas être atteint sur les bords Horizontaux de K).
3. En faisant tendre ε vers 0, montrer que $|f(z)| \leqslant \max(M_0, M_1)$.
4. On introduit maintenant la fonction $g(z) = \frac{f(z)}{M_0^{1-z} M_1^z}$.
   (a) Montrer que la fonction $z \mapsto M_0^{1-z} M_1^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et ne s'annule pas.
   (b) Calculer le module $|M_0^{1-iy} M_1^{iy}|$ pour $y \in \mathbb{R}$.
   (c) Vérifier que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|g(iy)| \leqslant 1$ et $|g(1+iy)| \leqslant 1$.
5. En appliquant le résultat des questions précédentes à la fonction g, montrer que $|g(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \Omega$.
6. Conclure l'inégalité des trois droites d'Hadamard : Pour tout $x \in]0,1[$, on a :

   $$M(x) \leqslant M_0^{1-x} M_1^x.$$

Exercice 2.
Calculer l'intégrale suivante pour $n \in \mathbb{N}$

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}}.$$