Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Filière Math 5
Année 2025/2026
Analyse Complexe

Examen session normale (1h30)

Questions de cours

1. Énoncer l'inégalité de Cauchy.
2. Donner un exemple d'une fonction continue sur un domaine G qui n'admet pas de primitive sur G.
3. Donner le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{2^n}$.
4. Existe il une fonction holomorphe sur $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$ tel que pour tout $n \geqslant 1$:
$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{2n}} = -f\left(-\frac{1}{2^n}\right).$$

Exercice 1.
Soit $a \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$. On pose
$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\ , \quad z \in \mathbb{D}.$$

1. Montrer que $|\varphi_a(\zeta)| = 1$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. En déduire que $|\varphi_a(z)| < 1\ \forall z \in \mathbb{D}$.
2. Montrer que $\varphi_a : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est bijective et déterminer φ_a^{-1}.
3. Soit $a, b \in \mathbb{D}$ montrer qu'il existe $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ et $c \in \mathbb{D}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$:
$$\varphi_a \circ \varphi_b(z) = \lambda.\varphi_c(z).$$
4. En déduire que $G = \{\lambda\varphi_a\ /\lambda \in \partial\mathbb{D},\ a \in \mathbb{D}\}$ est un groupe pour la composition.
5. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe bijective. Posons $b = f(0)$ et $F = \varphi_b \circ f$. Montrer que $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ bijective et que $|F(z)| \leqslant |z|\ \ \forall z \in \mathbb{D}$.
6. En déduire que $f \in G$.

Exercice 2.
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\left(-nt + \cos t\right) e^{-\sin t} dt \qquad n \in \mathbb{N}.$
2. $J_x = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + x} \qquad x > 0.$