Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

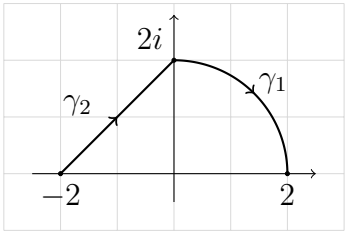
Filière Math S5
Année 2025/2026
Analyse Complexe

Série 3

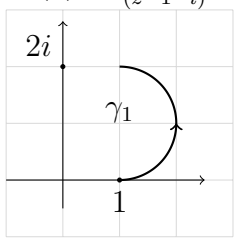
Exercice 1.
Calculer l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ dans les cas suivants :

$$a)\begin{cases} f(z)=|z| \\ \gamma(t)=2it-i\ ;\ t\in[0,1]\end{cases} \quad b)\begin{cases} f(z)=|z| \\ \gamma(t)=e^{it}\ ;\ t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\end{cases} \quad c)\begin{cases} f(z)=\frac{e^z}{1+z^2} \\ \gamma(t)=1+e^{it}\ ;\ t\in[0,2\pi]\end{cases}$$

$d)$ $f(z)=|z|^2$



$e)$ $f(z)=\frac{z}{(z-1-i)^2}$



Exercice 2.
Soit $a,b\in\mathbb{C}^*$ vérifiant $|a|<|b|$. Considérons l'intégrale

$$I_R(a,b)=\int_{C(0,R)}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}.$$

Calculer la valeur de $I_R(a,b)$ en fonction de R.

Exercice 3 (Intégrale de Fresnel)**.**
Considérons les intégrales convergentes suivantes :

$$I=\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx\ ,\qquad J=\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx\ ,\qquad G=\int_0^{+\infty}\exp(-x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

En intégrant la fonction $f(z)=\exp(-z^2)$ sur le bord ∂K_R du secteur angulaire

$$K_R=\left\{z=re^{i\theta}/0\leqslant r\leqslant R, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\},$$

calculer les valeurs de I et J.
Indication : utiliser la relation $\sin t\geqslant\dfrac{2}{\pi}t$, $\forall t\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

Exercice 4.

a) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme, $a\in\mathbb{C}$ et $R>0$. Montrer que

$$\int_{\mathcal{C}(a,R)}\overline{P(z)}dz=2\pi iR^2\overline{P'(a)}.$$

b) Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé lisse ($\gamma(t) = x(t) + iy(t)$). On note :

$$A(\gamma) = \frac{1}{2i} \int_\gamma \overline{z} dz.$$

1. Montrer que $A(\gamma) \in \mathbb{R}$ et que

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} dt.$$

2. En utilisant la formule de Green, Justifier que $A(\gamma)$ peut être interprétée comme l'aire délimitée par γ comptée positivement ou négativement en fonction de l'orientation de γ.

c) On suppose que f est injectif holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D(0,1)}$ montrer que la surface A_f du domaine $f(D(0,1))$ vaut :

$$A_f = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})} f'(e^{it}) dt.$$

En déduire que si $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est le développement de f au voisinage de 0 alors :

$$A_f = \pi \sum_{n \geqslant 1} n |a_n|^2.$$

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ et $R > 0$ tels que $R > \max(|a|, |b|)$. Notons $\mathcal{C}(0,R) = \{\zeta \in \mathbb{C} / |\zeta| = R\}$.

1. Montrer que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(0,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - b)(\zeta - a)} d\zeta.$$

2. En déduire que

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{|b-a|}{2\pi} \frac{R}{(R - |b|)(R - |a|)} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})| dt$$

3. Redémontrer le théorème de Liouville.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \log\left(1 + r^2 - 2r\cos t\right) dt$, pour tout $r \in]0,1[$.
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(nt - \sin t)\, dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-\sin t} \cos(-nt + \cos t)\, dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\cos t + i \sin t)}{\cos 2t + i \sin 2t} dt$.

Exercice 7.
Donner le développement en série de Laurent des fonctions suivantes :

1. Dans : $\mathbb{C}^*$,
$$f(z) = \sin\Big(\frac{z-1}{z}\Big).$$
2. Dans : $\mathbb{D} = D(0,1)$, $C_1 = C(0,1,2)$, $C_2 = C(0,2,+\infty)$.
$$g(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{2-z}$$
3. Dans : $C_1 = C(0,1,+\infty)$, $C_2 = C(0,0,1)$.
$$h(z) = \frac{1}{1-z}\exp(\frac{1}{z}).$$

Exercice 8.
En utilisant le théorème des résidus, calculer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}, \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+1}dx, \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}dx, \quad L = \int_0^{2\pi} \cos^3(t)+\sin^2(t)dt$$

$$M = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\sin t}, \qquad N = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}dx, \qquad O_a = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(at)}{1+t^2}dt \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Exercice 9.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-2\pi i t x} dt$.

1) Justifier l'existence de f.
2) Montrer que $f(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\cos(2\pi t x)\, dt$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $g(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$. Soient $a > 0$ et $\gamma = \gamma_1.\gamma_2.\gamma_3.\gamma_4$ le chemin défini par $\gamma_1(t) = t,\ \text{pour } t \in [-r, r],\ r > 0$, $\gamma_2(t) = r + it,\ \text{pour } t \in [0, 2\pi a]$, $\gamma_3(t) = t + 2\pi a i,\ \text{pour } t \in [-r, r]$, et $\gamma_4(t) = -r - it,\ \text{pour } t \in [-2\pi a, 0]$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_\gamma g(z)\, dz = 0$.
4) Montrer que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_2} g(z)\, dz = 0$ et $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_4} g(z)\, dz = 0$.
5) Montrer que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_3} g(z)\, dz = \sqrt{2\pi}$.
6) Montrer que $f(a) = \sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2 a^2}$. En déduire $f(x) = \sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2 x^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{e^{iz}-1}{z}$.

1) Montrer que f est prolongeable en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2) Soit $\gamma = \gamma_1.\gamma_2$ le chemin défini par $\gamma_1(t) = t,\ \text{pour } t \in [-R, R]$ et $\gamma_2(t) = Re^{it},\ \text{pour } t \in [0, \pi]$. Montrer que

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = 2i\int_0^R \frac{\sin t}{t}dt \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}dz - i\pi.$$

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 11.
Soit $a \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$. On pose

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \ , \quad z \in \mathbb{D}.$$

1. Montrer que $|\varphi_a(\zeta)| = 1$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. En déduire que $|\varphi_a(z)| < 1 \ \forall z \in \mathbb{D}$.
2. Montrer que $\varphi_a : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est bijective et déterminer φ_a^{-1}.
3. Soit $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ bijective. Posons $b = f(0)$ et $F = \varphi_b \circ f$. Montrer que $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ bijective et que $|F(z)| \leqslant |z| \ \ \forall z \in \mathbb{D}$.
4. En déduire qu'il existe $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ et $a \in \mathbb{D}$ tels que $f = \lambda\varphi_a$ sur $\mathbb{D}$.

Exercice 12.
Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, vérifiant $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f(a) = 0$.
2. Montrer que f admet un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C}$.
3. Notons par $a_1 \cdots, a_p$ les zéros de f, $m_1, \cdots, m_p$ les multiplicités correspondantes. Montrer qu'il existe g holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = (z-a_1)^{m_1} \cdots (z-a_p)^{m_p} g(z) \ , \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

   avec $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
4. Posons $P(z) = \displaystyle\prod_{j=1}^{p} (z-a_j)^{m_j}$, $z \in \mathbb{C}$ et $h = \dfrac{1}{g}$ sur $\mathbb{C}$.
   i) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que si $m = m_1 + \cdots m_p$, on a

$$|h(z)| \leqslant C(1+|z|)^m \ , \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

   ii) Montrer que h est un polynôme et $\deg h \leqslant m$.
5. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f = \lambda P$.

Exercice 13.
Soient $a, b \in]0, +\infty[$ et Λ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1. Trouver un chemin γ dans $\mathbb{C}$ d'image Λ.
2. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$. En déduire que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Exercice 14.
Pour $a > |b| > 0$, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Exercice 15.
Pour Re $z > 1$ et $n \geqslant 1$, on pose

$$f_n(z) = \frac{1}{n^z} = e^{-z \log n}$$

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur tout demi-plan $\Pi_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 1 + \varepsilon\}$, $(\varepsilon > 0)$.
2. Montrer que la fonction $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ est holomorphe sur $U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 1\}$ et on a

$$f^{(k)}(z) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^z}.$$

Exercice 16.
Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie par

$$f_0(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{et} \quad f_n(z) = \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad \text{si } n \geqslant 1.$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
2. Étudier la convergence uniforme sur un disque fermé $\overline{D(z_0, r)} \subset U$.
3. Montrer que la somme F de la série $\sum f_n$ est holomorphe sur U et on a

$$F'(z) = \frac{-1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2} \right), \quad \text{pour tout } z \in U.$$

Exercice 17.
Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur $D_R := \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < R\}$.
On désigne par u la partie réelle de f, $M_f(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$ et $A_f(r) = \sup\limits_{|z|=r} |u(z)|$.

1. Montrer que si f est une fonction entière tel que $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{M_f(r)}{r^k} = 0$.
   Alors f est un polynôme de degré inférieur à k.
2. a) Montrer que la fonction $r \mapsto M_f(r)$ est croissante.
   b) En déduire que la fonction $r \mapsto A_f(r)$ est aussi croissante.
3. On suppose que $f(0) = 0$, et qu'il existe une constante $A > 0$ tel que $A_f(r) \leqslant A$.
   a) Montrer que si $h : D_R \to D_1$ tel que $h(0) = 0$. Alors

$$|h(z)| \leqslant \frac{|z|}{R}.$$

   b) On pose $g(z) = \frac{f(z)}{2A - f(z)}$, vérifier que g est holomorphe sur D_R.
   c) Montrer que $g(D_R) \subset D_1$, en déduire que

$$|g(z)| \leqslant \frac{|z|}{R} \qquad |z| < R.$$

   d) Démontrer que

$$M_f(r) \leqslant \frac{2Ar}{R - r}, \qquad r < R.$$

4. On suppose que f est une fonction entière, montrer que pour tout $r > 0$:

$$M_f(r) \leqslant 2A_f(2r) + 3|f(0)|.$$

5. En déduire que si f est une fonction entière tel que $\lim_{r\to\infty} \dfrac{A_f(r)}{r^k} = 0$.
Alors f est un polynôme de degré inférieur à k.