Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Master Ingénierie Digitale
Année 2024/2025
Mesures et probabilités

Examen session normale (3h00)

Problème 1. (14 points)

Partie I

Dans toutes cette partie on considère $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ désigne des suites de nombres complexes.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer les intégrales suivant :

$$a)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}dt \qquad\qquad b)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)e^{int}dt.$$

2. En déduire l'égalité de Parseval :

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikt}\right\|_2^2 = \int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikt}\right|^2 dt = 2\pi\sum_{k=0}^{n}|c_k|^2.$$

3. Montrer que :

$$\sum_{p,q=0}^{n}\frac{a_p b_q}{p+q+1} = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^{i(k+1)t}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k e^{ikt}\right)dt.$$

4. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Hölder $p=2$) Montrer que :

$$\sum_{p,q=0}^{n}\frac{|a_p b_q|}{p+q+1} \leqslant \pi\sqrt{\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}|b_k|^2}. \tag{1}$$

Partie II Soit f une fonction réelle dans $L^p([0,1])$ où $p>1$. On pose $s_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$.

1. On suppose que f est une fonction positive.
   (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sum_{p,q=0}^{n} x_p x_q s_{p+q} \geqslant 0 \quad \text{ et que } \quad \sum_{p,q=0}^{n} x_p x_q s_{p+q+1} \geqslant 0.$$

   (ii) En déduire que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$

$$\det((s_{i+j+m})_{0\leqslant i,j\leqslant n}) \geqslant 0.$$

   (iii) Application : Montrer que pour tout $N, L \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sum_{n,m=0}^{N}\frac{a_n a_m}{n+m+L} \geqslant 0.$$

2. (i) Justifier que $0 \leqslant s_n \leqslant \|f\|_p$ et que $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(ii) Montrer que pour tout $r > q$ $(s_n)_n \in \ell^r(\mathbb{N})$, c'est a dire que la série

$$\sum_{n\geqslant 0} |s_n|^r < \infty.$$

Partie III

1. On considère le cas $p = 2$.
   (i) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et toute suite de nombre positive $b_0, b_1, \ldots, b_N$:

$$\left(\sum_{n=0}^{N} s_n b_n\right)^2 \leqslant \pi \|f\|_2^2 \sum_{n=0}^{N} b_n^2.$$

   (ii) En déduire que $(s_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ et que :

$$\sum_{n\geqslant 0} s_n^2 \leqslant \pi \|f\|_2^2.$$

   (iii) Justifier que la constante π est optimale en testant par $f(t) = (1-t)^{\varepsilon - \frac{1}{2}}$ et en faisant tendre $\varepsilon > 0$ vers 0.

Exercice 1. (3 points)
Soit f une fonction croissante positive continue sur $\mathbb{R}_+$ tel que $f(0) = 0$ Montrer que :

$$1. \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n e^{-\frac{x}{f(1/n)}} dx = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right) \qquad 2. \lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}_+} \frac{f(nx)}{\sqrt{1+x}} dx = \|f\|_1.$$

Exercice 2. (3 points)
On note par $r_1, r_2, \ldots$ la suite des nombres rationnelles. On définie la fonction $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n\geqslant 1} \frac{4^{-n}}{|x - r_n|} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ +\infty & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que

$$m_1(\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) < \infty\}) = +\infty.$$

Exercice 3. (6 points)
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note b_n la mesure de Lebesgue de la boule unité $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $b_{n+1} = b_n I_{n+1}$, où :

$$I_n = \int_{-1}^{1} \sqrt{(1-t^2)^{n-1}} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

2. Démontrer la relation

$$(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n.$$

   Calculer I_0, I_1. En déduire les valeurs de I_{2k}, I_{2k+1} et $I_n I_{n+1}$.

3. Déduire que

$$b_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \quad \text{et} \quad b_{2k-1} = \frac{2^k \pi^{k-1}}{1.3.5 \ldots (2k-1)}.$$