Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Master Ingénierie Digitale
Année 2023/2024
Mesures et probabilités

Examen session normale (3h00)

Problème 1. (14 points)

Pour une fonction mesurable positive f sur $\mathbb{R}_+$, on pose pour $x > 0$:

$$F_f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Partie I

On suppose que f une fonction positive continue sur $\mathbb{R}_+$ a support compact.

1. Montrer que F_f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F_f(x) = f(x) - xF_f'(x)$.
2. Soit $p \in]1, \infty[$. Justifier que $F_f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ et montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}_+} F_f^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int_{\mathbb{R}_+} f(x)F_f(x)^{p-1}dx.$$

(Utiliser $F_f^p = (f - xF_f')F_f^{p-1}$.)

3. En déduire que

$$\|F_f\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Partie II

1. On suppose que $h : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive, et $p > 1$, on pose

$$\varphi(x) = \int_c^d h(x, y)dy.$$

(i) Montrer que pour tout $g \in L^q([a, b])$:

$$\int_a^b |\varphi(x)g(x)|dx \leqslant \|g\|_q \int_c^d \left[\int_a^b h(x, y)^p dx\right]^{1/p} dy.$$

(ii) En déduire que

$$\left(\int_a^b \left[\int_c^d h(x, y)dy\right]^p dx\right)^{1/p} = \|\varphi\|_p \leqslant \int_c^d \left[\int_a^b h(x, y)^p dx\right]^{1/p} dy.$$

2. On suppose maintenant que $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ positive, pour $p > 1$. Montrer que

$$\|F_f\|_p \leqslant \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(tx)^p dx\right)^{1/p} dt.$$

(Utiliser $F_f(x) = \int_0^1 f(tx)dt$.)

3. En déduire que

$$\|F_f\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Partie III

Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres décroissante positives et $p > 1$ tel que $\sum_{n\geqslant 1} a_n^p < \infty$. On pose pour $x > 0$

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1} a_n \chi_{[n-1,n[}(x).$$

1. Montrer que $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ et calculer $\|f\|_p$.
2. On utilisant la monotonie de $(a_n)_n$ montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k\leqslant n} a_k \leqslant F_f(x) \qquad x \in [n-1, n[.$$

3. En déduire que

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n\geqslant 1} a_n^p.$$

Exercice 1. (3 points)

Soit $(a_n)_n$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim_n a_n = +\infty$. Montrer que :

$$1. \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n e^{-a_n x} dx = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{a_n} \qquad 2. \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{a_n^{1-x}}{(a_n x)^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2. (3 points)

En calculant les intégrales suivantes de deux manières :

$$1. \int_{]0,+\infty[^2} \frac{dxdy}{(1+x^2y)(1+y)} \qquad 2. \int_{[0,+\infty[^2} e^{-x(1+y^2)} dxdy.$$

Montrer que :

$$1. \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{4} \qquad 2. \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 3. (6 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes tel que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) et Y suit la loi binomiale de paramètre $(n, 1-p)$, où $p \in]0, 1[$ et $n \geqslant 2$.
On considère la matrice aléatoire :

$$M = \begin{pmatrix} X & 1 & 1 \\ 0 & X+Y & 1 \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la probabilité que M soit nilpotente.
2. Calculer la probabilité que M soit inversible.
3. Calculer la probabilité que le spectre de M contient exactement 2 éléments.