Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

**Filière Math S3**
**Année 2026/2027**
**Algèbre 4**

# Série 2

**Exercice 1.**
Soient $P$ et $Q$ deux polynômes et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Montrer que

$$\ker P(f) + \ker Q(f) = \ker(P \vee Q)(f).$$

**Exercice 2.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

1. Montrer que si $\ker f$ admet un supplémentaire $M$ stable par $f$ dans $E$, alors $M = \mathrm{im} f$.
2. Montrer la décomposition de Fitting : Il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que
$$E = \ker f^r \oplus \mathrm{im} f^r.$$
3. En déduire qu'il existe un unique couple $(F, G)$ de sous-espaces vectoriels de $E$ stables par $f$ tel que :
   — $E = F \oplus F$.
   — La restriction de $f$ à $F$ est nilpotente.
   — La restriction de $f$ à $G$ est inversible.

**Exercice 3.** Calculer les valeurs propres des endomorphismes $f \in \mathcal{L}(R)$ suivants :

1. $E = \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z, t) = (2x, 3x - y, x - 12y + 2z, t - z - 10x)$.
2. $E = \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z, t) = (2x - y, 3x - y, x - 12y + 2z - t, t - z)$.
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) = P'$.
4. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) = P(X + 1) - P(X)$.
5. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A^t$.

**Exercice 4.** On considère les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le spectre de $A$ et de $B$.
2. Pour chaque matrice, déterminer la dimension des sous-espaces propres associés.
3. Étudier la diagonalisabilité de $A$ et $B$. Si la matrice est diagonalisable, expliciter une matrice de passage $P$ et la matrice diagonale associée.

**Exercice 5.** Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 2$. On définit sa matrice compagnon $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de $C_P$ est $P_{C_P}(X) = (-1)^n P(X)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $C_P$.
   (a) Expliciter un vecteur propre $v_\lambda \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associé à $\lambda$.
   (b) En déduire que $\dim E_\lambda(C_P) = 1$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les racines de $P(X)$ pour que $C_P$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Diagonaliser
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 6.** On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de $A$ et vérifier que $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$.
2. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une matrice de passage $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = J$, où $J$ est sous forme de Jordan.

**Exercice 7.** On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. **Forme de Jordan :**
   (a) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$ et déterminer les valeurs propres de $A$.
   (b) Déterminer la dimension des sous-espaces propres associés.
   (c) Expliciter la forme de Jordan $J$ de la matrice $A$ ainsi qu'une matrice de passage $P$.
2. **Décomposition de Dunford et Exponentielle :**
   (a) Décomposer la matrice $A$ sous la forme $A = D + N$ où $D$ est diagonalisable, $N$ est nilpotente et $DN = ND$.
   (b) Calculer $e^{tD}$ et $e^{tN}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire l'expression explicite de l'exponentielle de matrice $e^{tA}$.