Université Chouaib Doukkali
Faculté des sciences El Jadida
Département de mathématiques

Filière Math S3
Année 2026/2027
Algèbre 4

Série 1

Exercice 1.
On considère l'application $D : P \mapsto P'$ sur $\mathbb{R}[X]$:

1. Vérifier que D est un endomorphisme.
2. Montrer que D n'admet pas de polynôme annulateur non nul.

Exercice 2.

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq b$ et f l'endomorphisme défini par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ by \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que le polynôme $P(X) = (X - a)(X - b)$ est un annulateur de f.
   (b) Refaire le même calcul en utilisant la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$f^m = \frac{a^m - b^m}{a - b} f + \frac{ba^m - ab^m}{b - a} \mathrm{Id}_E.$$

2. On suppose qu'il existe un polynôme scindé à racines simples $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ annulant f. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$f^m = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^m L_k(f),$$

   où $L_1, \ldots, L_p$ désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Exercice 3. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que si $P(f)$ est inversible, alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(P(f))^{-1} = Q(f)$.
2. Démontrer que $P(f)$ est inversible si et seulement si $P \wedge \mu_f = 1$.
3. En déduire que, $\mathbb{K}[f]$ est un corps si et seulement si μ_f est irréductible sur $\mathbb{K}$.

Exercice 4. Soient E un espace de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.

1. Montrer que l'indice de nilpotence de f est n si, et seulement si dimkerf $= 1$.
2. Montrer que si l'indice de nilpotence de f est $n - 1$, alors dim ker $f \cap \mathrm{im} f = 1$.
3. Que peut-on dire de la réciproque ?

Exercice 5. Soient E un espace de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que

$$(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)),$$

   soit une base de E.

(a) Montrer que tout polynôme annulateur $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ est nul. En déduire le degré du polynôme minimal.

(b) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, tel que

$$v(x) = P(u)(x).$$

(c) En déduire que

$$\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f].$$

2. On suppose que $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n. Montrer que

$$\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f].$$

3. Donner un exemple où $\mathcal{C}(f) \supsetneq \mathbb{K}[f]$.